

(над страницами книги А.А.Самарского и А.П.Михайлова "Математическое моделирование")

В.Н.Новосельцев

Институт проблем управления РАН, г.Москва

Современная теория управления, как и многие другие науки, сегодня немислима без широкого применения методологии математического моделирования. Тем не менее, математическое моделирование как научная дисциплина еще очень молода, и выход обобщающей монографии [\[1\]](#) представляется важным и знаменательным событием.

В этой книге, как кажется, проблемы моделирования впервые рассматриваются с общих позиций, вне привязки к конкретному типу объектов. В книге даются ответы на многие вопросы, которые постоянно возникают у специалистов, обращающихся к математическому моделированию как к общему способу исследования объектов реального мира и поэтому она обоснованно заслуживает самых высоких оценок.

Правда, книга, написанная в традициях академической науки, не касается ряда вопросов, на которые читатель также хотел бы получить ответы. Эти вопросы, как правило, напрямую связаны с использованием математических моделей. Такие вопросы, по сути своей прикладные, также имеют два аспекта - как узкий "дисциплинарный", связанный с конкретикой разных отраслей знаний (техникой, естественными науками, биологией, социальными и экономическими дисциплинами), так и общенаучный. Для теории управления, которая имеет дело с объектами любой природы и старается анализировать их в рамках единых моделей и подходов, проблемы применения математических моделей особенно важны. С этой точки зрения понятно желание специалиста по теории управления расширить круг вопросов, относящихся как к практике, так и к методологии математического моделирования.

Опыт, накопленный при моделировании систем в рамках теории управления, во многих случаях требует изменить акценты рассмотрения, принятые в монографии [\[1\]](#). Поэтому мы, отходя от традиций узкого рецензирования, рассмотрим те методологические аспекты проблемы моделирования, которые лишь частично перекрываются с изложенными в

[\[1\]](#)

идеями и методами.

С одной стороны, это касается общетеоретических вопросов - таких, как "типизация" математических моделей (феноменологические модели, системные модели и, наконец, виртуальные модели) или проблемы "адекватности" моделей, понимаемой в самом широком смысле. С другой стороны, это многочисленные проблемы, возникающие в теории управления при практическом использовании методов математического моделирования. В отличие от "академической трактовки" методики математического моделирования, в практике управления большое внимание приходится уделять проблеме общения с "заказчиком" модели - лицом, для которого и в интересах которого создается модель.

Основные концепции книги.

Общая идея книги - формулировка и рассмотрение проблемы математического моделирования как триады "модель"- "алгоритм"- "программа".

Под моделью при этом понимается «"эквивалент" объекта, отражающий в математической форме важнейшие его свойства - законы, которым он подчиняется, связи, присущие составляющим его частям, и т.д.» (стр.8). Выбор вычислительных алгоритмов - следующий этап, а разработка программ, переводящих модель и алгоритм «на понятный компьютеру язык», завершает создание рабочего инструмента исследователя. Готовая триада тестируется в "пробных" экспериментах. На этом этапе посредством цепочки усложнений (иерархии все более полных моделей) обеспечивается ее адекватность (стр. 21). После этого можно переходить к "опытам", дающим «все требуемые качественные и количественные свойства и характеристики объекта» (стр.8).

Само по себе построение моделей представляет собой «применение фундаментальных законов природы, вариационных принципов, аналогий, иерархических цепочек» (стр.11), а процесс построения моделей включает в себя следующие этапы (стр.25):

1. «Словесно-смысловое описание объекта или явления» («формулировка предмодели»);
2. «Завершение идеализации объекта» и упрощение описания;
3. Переход «к выбору или формулировке закона (вариационного принципа, аналогии и т.п.)» и его записи в математической форме;
4. «Завершает формулировку модели ее "оснащение" » (задание начального состояния и параметров объекта). Этот этап особенно важен, поскольку:
«И, наконец, формулируется цель исследования модели (найти закон преломления света, достичь понимания закономерностей изменения популяции, определить требования к конструкции ракеты, запускающей спутник, и т.д.)» (стр.25);

5. Модель изучается всеми доступными методами (в том числе с применением различных подходов и вычислительных методов);

6. В результате исследования модели достигается поставленная цель. При этом «должна быть установлена всеми возможными способами (сравнением с практикой, сопоставлением с другими подходами) ее адекватность - соответствие объекту и сформулированным предположениям. »(стр.26).

Плодотворность методологии математического моделирования авторы подтверждают интересными и многочисленными примерами из области механики, термодинамики, биологии, экономики и социальных наук, что действительно демонстрирует ее многосторонность и широту. Среди новых направлений математического моделирования в книге затронут и «трудно формализуемый человеческий фактор» - в рамках моделей экономических процессов, моделей соперничества и распределения власти.

Особое внимание уделено таким общеметодологическим аспектам проблемы, как универсальность моделей. Универсальность трактуется прежде всего как общность математических описаний (процесс колебаний в системах любой природы всегда описывается одними и теми же уравнениями - с. 48; параболические уравнения равно подходят для широкого класса явлений - с.146). Но универсальны и используемые аналогии - «предположения типа "скорость изменения величины пропорциональна значению самой величины (или функции от нее)" широко используются в далеких друг от друга областях знаний » (стр.21).

Удачна, наконец, и дидактическая компоновка. Так, во многих случаях в ее главах сначала дается содержательный пример, а на его основе делаются «предварительные выводы» более общего характера, закрепляемые затем упражнениями и подкрепляемые ссылками на литературные источники, что наиболее подходит для «аспирантов, студентов, изучающих и использующих методы математического моделирования», как и написано в аннотации к книге.

Математические модели как инструмент решения практических задач

Характерной особенностью монографии является то, что она написана для тех, кто интересуется моделированием "безотносительно к природе" моделируемых объектов. Это закономерным образом приводит к тому, что изложение идей и методов, лежащих в основе моделирования конкретных процессов и явлений (при всем разнообразии примеров) скорее не отражает тех особенностей, которые неизбежно возникают при

практическом использовании моделей. Поэтому не менее характерной особенностью книги является то, что она написана безотносительно к тому, кто и как будет эти модели использовать.

Можно сказать, что для рассматриваемой монографии, характерен "академический подход", ориентация на "самодостаточность" математической модели как универсального способа познания мира.

Теория управления в этом отношении занимает своеобразное "промежуточное" положение. С одной стороны, в теории управления, как и в рассматриваемой монографии, моделирование систем проводится безотносительно к физической природе объекта. Но, - с другой стороны, - математические модели в теории управления возникают не сами по себе, а в ходе решения задач управления реальными системами, объектами и процессами. Поэтому оказывается, что опыт моделирования, ориентированного на задачи управления, позволяет сделать и общие выводы, касающиеся применения математических моделей как инструмента решения практических задач.

Опыт, накопленный в теории управления, в чем-то согласуется с концепциями книги [\[1\]](#), в чем-то их дополняет, а в чем-то и противоречит им. В дальнейшем мы постараемся как выявить черты сходства, так и подчеркнуть расхождения.

Существует принципиальное различие в методологии математического моделирования в ее "чистом виде" (если применить этот термин к рассматриваемой монографии [\[1\]](#)) и в науке об управлении. Оно состоит в том, что в теории управления математическая модель является не самоцелью, а лишь инструментом решения задачи управления.

В первую очередь это касается оценки "адекватности" моделей. Об адекватности модели как практического инструмента судят не только по тому, насколько близко математическое описание физике реальной жизни (см. выше характеристику адекватности модели в [\[1\]](#) как «соответствие объекту и сформулированным предположениям»).

Суждение об адекватности моделей как в теории управления, так и в других

практических применениях, диктуется решаемой задачей. Очевидно, что "академически" проверить адекватность модели, на которой получен прогноз "ядерной зимы", в деталях невозможно - моделируемые процессы сложны и мало изучены, число "правдоподобно" оцениваемых параметров очень велико и т.д. Однако поставленной задаче - предупредить мир о характере и масштабах возможной катастрофы - модель вполне адекватна.

Если какую-то задачу можно решить без строгой математической модели, например, ограничившись "эвристическими" рекомендациями, алгоритмами или решениями, дело до реального моделирования объекта может и не дойти. Таким образом, отсутствие математического описания парадоксальным образом можно считать простейшей "неадекватной" моделью процесса.

Об адекватности моделей можно говорить и в том случае, когда соответствие модели объекту весьма относительно. Для одного класса моделей эта идея была доведена до логического конца в теории Вапника-Червоненкиса [2] восстановления зависимостей на небольших выборках. Феноменологическая модель в этом случае представляет собой зависимость, восстанавливаемую по выборке малого объема. Все такие модели одинаково далеки от "физики" процесса, порождающего выборку, но тем не менее среди них существует наилучшая - при применении которой "риски" минимальны.

Птолемей и Коперник.

Во многих случаях, если рекомендации и решения, полученные на основе "неадекватной" модели любой степени сложности, удовлетворяют потребности "заказчика", то адекватная модель не разрабатывается совсем или, даже будучи разработанной, остается невостребованной.

В качестве примера из истории науки, иллюстрирующего влияние практических потребностей на судьбу математических моделей, рассмотрим переход от "неадекватной" геоцентрической модели мира Птолемея к гелиоцентрической парадигме Коперника.

Более тысячи лет практические нужды "заказчиков" (связанные, например, с предсказанием небесных явлений и разливов Нила, а также с управлением кораблями по светилам), удовлетворялись птолемеевой "моделью мира". То, что эта модель была,

как хорошо известно, неадекватной реальной картине Солнечной системы, для практики было неважно - количественные расчеты (при включении в модель эпициклов и других усложняющих элементов) получались достаточно точными и удовлетворяли всех.

Гелиоцентрическая модель Коперника с самого начала отражала физическую структуру объекта - Солнечной системы. Однако сам Коперник при математических расчетах считал орбиты планет круговыми, так что рассчитанные им эфемериды по точности не давали преимуществ по сравнению с птолемеями. Адекватно отражая структуру Солнечной системы, модель, тем не менее, долго оставалась втуне. Только когда Иоганн Кеплер, открыв законы движения планет, учел эллиптичность орбит (тем самым введя дополнительный расчетный параметр), точность расчета эфемерид резко возросла. Модель Коперника сразу вошла в повседневную практику прикладной астрономии. В течение нескольких столетий она работала в задачах управления "off line" для морской и воздушной навигации. В последние десятилетия математическая модель в форме "задачи двух тел" или численного интегрирования уравнений движения используется непосредственно "в контуре управления и в реальном времени" ("on-line") - при управлении космическими аппаратами и при решении других задач.

Вопросы адекватности модели тесно связаны с возможностью получения практически важных выводов и рекомендаций. Авторы книги [1] стоят на позиции, находящей широкую поддержку у специалистов по анализу систем: если модель адекватна, то она позволяет «не только определять количественные характеристики изучаемых процессов, но и обнаруживать качественно новые явления» (стр.283). Общение с "узкими" специалистами, хорошо знающими специфику своих задач, заставляет специалиста по управлению критически относиться к этой точке зрения.

Действительно, любые «новые явления», обнаруженные в вычислительном эксперименте, требуют подтверждения в эксперименте реальном. Ведь даже по рекомендациям самих авторов [1], установление адекватности модели продолжается на любом этапе работы с моделью, в том числе и сравнением с практикой ([1], стр.26). Отсюда следует, что если при моделировании обнаружено «качественно новое явление» - различие ожидаемого по модели и реального ходом процесса, то более вероятно не открытие нового явления, а необходимость уточнения модели. Самый известный случай "открытия на кончике пера" - предсказанная Леверье путем анализа математической модели движения Урана планета Плутон была действительно открыта астрономом Галле. Однако сколько аналогичных предсказаний не подтвердилось, в истории астрономии обычно не говорится.

Несколько слов об истории математического моделирования

Говоря о математическом моделировании, нельзя не обратить внимания на эволюционный процесс "смены" парадигм моделирования, который, как кажется, характерен для многих дисциплинарных областей, где применяются методы теории управления. До сих пор ни в одной из работ по теории моделирования этот процесс не рассматривался как "смена поколений" математических моделей. Тем не менее сейчас можно было бы говорить уже о трех таких поколениях. На первых этапах речь чаще всего идет о математической записи отдельных феноменологических наблюдений над реальными объектами. Для них характерна простота описаний, типична линейность уравнений и малая размерность (часто воспроизводится всего одна или две переменных). Методы анализа связаны в основном с получением аналитических решений и графическим рассмотрением на фазовой плоскости [3]. Затем появляются модели, описывающие объект "во всей его полноте" - в них объект представлен в виде "системы" - модель отражает его структуру и законы, по которым он функционирует. Модели становятся существенно нелинейными, чисто математический аппарат дополняется логико-семантическим. Возрастает размерность, достигая нескольких десятков. Такие модели называются "сложными", "большими", а рабочим инструментом на этом этапе становится вычислительный эксперимент. Трудно не заметить, что в настоящее время начинается переход к третьему поколению математических моделей - моделям виртуального мира. Виртуальное моделирование можно определить как воспроизведение трехмерного мира компьютерными средствами. Резко возрастает объем обрабатываемой и воспроизводимой информации (например, количество визуализируемых "деталей" достигает нескольких тысяч). Любопытно, что модели третьего поколения по своей математической сущности могут быть как "феноменологическими", так и "системными" - на содержании этих понятий мы остановимся чуть ниже.

Процесс смены поколений моделей можно проиллюстрировать на многих дисциплинарных примерах - в небесной механике это переход от феноменологической модели Птолемея к системной модели Коперника-Кеплера и затем к современным моделям (таким, как совокупные модели движения объектов в космическом пространстве в системах слежения, используемых в космонавтике и в военном деле, или как виртуальные модели небесных явлений в мультимедийных системах Redshift [4]).

В биомедицине первое поколение моделей появилось в самом конце XIX в. - модель сердца как "эластичного резервуара" О.Франка [5] представляла собой типичную феноменологическую модель (модель данных). Многочисленные модели физиологических процессов [6,7] охарактеризовали приход второго поколения моделей - системных моделей процессов жизнедеятельности, использовавшихся для

исследования процессов управления искусственными органами. Развитие тренажерных моделей (в том числе мультимедийных) характеризует начало третьего этапа.

Наконец, такая же картина наблюдается в управлении технологическими процессами. Феноменологические модели передаточных функций, восстановленные по входу-выходным характеристикам объектов, сменились системными методами пространства состояний [8]. Третий этап математического моделирования также связан здесь с виртуальным моделированием - динамическим моделированием в реальном масштабе времени [9,10].

Говоря о России, можно вспомнить, что наука математического моделирования развивается в с 1960-х гг. и имеет большие традиции [1](#). Но для нас сейчас важно другое - часть накопленного тогда потенциала, получившая развитие в теории управления и ее применениях, до сих пор остается "не востребованной" современной наукой о моделировании в ее "чистом" виде, оставшись и за рамками книги

[\[1\]](#)

Отметим, что многие фундаментальные проблемы прикладного моделирования впервые были выявлены И.А.Полетаевым [\[14\]](#). Он первым обратил внимание на утилитарность математических моделей, дав оригинальную классификацию моделей по целям их использования: "поисковая" модель - для проверки гипотез, "портретная", она же - демонстрационная, - для замены объекта в эксперименте (например, для тренажеров - что в то время рассматривалось едва ли не как научная фантастика) и, наконец, "исследовательская модель", что в современном понимании означает ориентацию на сложный вычислительный эксперимент.

В другой работе И.А.Полетаев поднял еще один столь же важный круг вопросов - о принципиальной "субъективности" математического моделирования [\[15\]](#). По меньшей мере два его высказывания и сегодня заслуживают внимания:

В задаче математического моделирования «кроме объекта моделирования и модели, обязательно присутствует субъект моделирования, лицо, усилиями и в интересах которого осуществляется модель». Роль субъекта моделирования оказывается решающей, ибо именно его цели, интересы и предпочтения формируют модель.

Создание модели нужно не само по себе, а для решения практических задач, что только и может оправдать затраты сил на создание модели. Модель создается для того, чтобы работать: «Только полная реализация модели с ее "прогоном" через расчеты полностью окупает затраты на моделирование» [\[15\]](#).

Типы математических моделей, используемых в задачах управления

В современной теории управления создаются и применяются математические модели двух основных типов (хотя в различных разделах теории эти типы и определяются по-разному).

Для технологических объектов это деление соответствует "феноменологическим" и "дедуктивным" моделям [\[16\]](#). Под феноменологическими моделями понимаются преимущественно эмпирически восстанавливаемые входо-выходные зависимости, как правило, с небольшим числом входов и выходов. Дедуктивное моделирование предполагает выяснение основных физических закономерностей функционирования всех узлов процесса и механизмов их взаимодействия. Дедуктивные модели намного богаче, они описывают процесс в целом, а не отдельные его режимы.

Для биомедицинских объектов определение этих типов было дано американскими журналами "American Journal of Physiology" и "Journal of Applied Physiology", создавшими в 1984 г. объединенный Форум методологии моделирования, и давшими единую классификацию моделей для всех специализированных журналов Американского физиологического общества [\[17\]](#).

Первый тип моделей - аналитические модели (или, точнее говоря, модели данных). «Модели данных - это модели, которые не требуют, не используют и не отображают каких-либо гипотез о физических процессах (системах), в которых эти данные получены». Второй тип моделей - системные модели (или модели систем). Это математические модели, которые «строятся в основном на базе физических законов и гипотез о том, как система структурирована и, возможно, о том, как она функционирует» [\[17\]](#).

В идеале именно системные модели допускают возможность работы в технологиях виртуального моделирования - в разнообразных системах реального времени (операторские, инженерные, биомедицинские интерфейсы, разнообразные системы диагностики и тестирования и т.д. [10]). Можно ожидать поэтому, что именно системные модели составят ядро третьего этапа в развитии математического моделирования, хотя в настоящее время во многих "квази-виртуальных" применениях (например, в медицине [18]) используются и типичные феноменологические модели и модели данных, в чем-то стыкующиеся с так называемыми "базами знаний" современного искусственного интеллекта [19].

В этой связи становится ясным ограниченность круга рассмотрения в книге [1], где рассматриваются только системные модели. Очевидно, что если учитывать наличие двух типов моделей (не говоря уже о виртуальных моделях), то акценты в рассмотрении методологии моделирования сильно смещаются.

Триада математического моделирования

Сформулированная в книге триада ("модель"- "алгоритм"- "программа") - изящная конструкция, дидактически вполне отражающая суть методологии моделирования.

Но при решении практических задач значимость компонентов триады оказывается существенно разной. Как правило, основная тяжесть проблемы падает на первый пункт - собственно создание модели. Две других части на практике если сегодня и возникают, то обычно в случае уникальных, "экстремальных" по сложности задач. Построение вычислительной схемы численного решения системы алгебро-дифференциальных уравнений является классической задачей вычислительной математики. Для простейших моделей, в том числе моделей данных, никаких трудностей обычно не возникает. В рутинной работе специалист по управлению в большинстве случаев удовлетворяется стандартными численными процедурами решения дифференциальных уравнений (метод Эйлера, методы Рунге-Кутты высокого порядка и, возможно, методы с переменным шагом). Во многих случаях для таких целей используют готовые пакеты программ.

Это положение кажется довольно общим хотя бы потому, что подчеркнутая в [1] универсальность моделей (с.48) неизбежно влечет за собой универсальность алгоритмов и их программных реализаций.

Другое дело, что при переходе к моделям третьего поколения возникает свой круг алгоритмических и программных проблем, связанных с виртуальным моделированием и работой в реальном времени. Но сегодня это касается лишь самых "продвинутых" направлений теории управления, связанных с включением моделей непосредственно в рабочий контур систем (см., напр., [\[9\]](#)).

Способы использования математических моделей в задачах управления

Вплоть до недавнего времени математические модели использовались в практике управления только как источник входных данных для систем управления. Примером может служить рассмотренная выше ситуация с моделями Солнечной системы. Какова бы ни была исходная динамическая модель движения небесных тел - птолемея или коперникова -, на практике она использовалась (в режиме off-line) для расчета эфемерид, которые с начала XIX в. и применялись в системах управления как источник "опорных данных" для ведения процесса (например, при наведении телескопа на небесный объект). Моделирование технических систем на этапе проектирования для оптимизации их структуры и параметров продолжает эту традицию.

Но развитие техники (прежде всего - появление компьютерных технологий) во многих дисциплинарных областях сделало возможным непосредственное включение моделей в "работающие системы". Необходимые для работы данные в этом случае считаются в режиме реального времени (on-line) на основе динамической модели. Это относится не только к полетам космических кораблей. В мультимедийной астрономической программе Redshift виртуальная картина неба на экране монитора, наблюдаемая с любого небесного тела в любой момент исторического времени, вычисляется on-line посредством решения модельной задачи двух тел или численного интегрирования законов движения [\[4\]](#).

Вообще говоря, каждый из двух рассмотренных выше типов моделей имеет свои традиционные области применения. В практике управления технологическими процессами широко используются феноменологические модели. Простые по структуре, такие модели (обычно при числе переменных, менее 10) достаточно хорошо отражают истинное поведение объекта в окрестности отдельных "режимов работы". В задачах управления, где часто сама цель управления состоит в компенсации возмущающих воздействий, уводящих процесс от желаемой рабочей точки, это вполне допустимо [\[10\]](#).

Во многих других задачах управления принципиально применимы только системные модели. В статьях [9,10] различные способы использования модели объекта в задачах управления технологическими процессами с точки зрения способа обработки информации, содержащейся в модели, рассмотрены подробно.

Модель в системе управления может использоваться неявно - как пассивный источник количественных входо-выходных зависимостей. Модель может входить в систему и явно, присутствуя в форме блока, вычисляющего выходы модели по ее входам. В этом случае различаются два способа использования модели: включение модели в основной контур регулирования и ее использование как динамического имитатора выходных переменных объекта управления.

В последнем случае речь идет о развитии так называемого имитационного моделирования - динамическом моделировании объекта [10]. Динамическое моделирование характерно для различных задач реального времени, прежде всего, для компьютерных тренажеров. Оно осуществляется в реальном времени, что позволяет использовать его результаты в различных технологиях реального времени (от обнаружения неисправностей до интерактивного тренинга операторов).

Этапы построения математических моделей для практических задач

Теперь ясно, что основное отличие процесса моделирования в теории управления от приведенной в [1] схемы - связь этапности создания модели с решаемой задачей. Поэтому дополнительно к стандартным этапам [1], процитированным в начале настоящих заметок, в практике управления неизбежно добавляются два "обрамляющих" этапа.

Открывающий этап - рассмотрение того, что надо получить от создаваемой модели. На этом этапе прежде всего выясняется тип модели - феноменологическая или системная (о виртуальных моделях пока говорится чрезвычайно редко). Здесь же уточняется не очень акцентированный в [1] пункт - выбор вектора состояния, описывающего проблемную ситуацию. Вообще говоря, на этом этапе может быть принято решение и о том, что создание модели не требуется.

Особый вопрос на этом этапе состоит и в выборе языка описания «предмодели» -

переводе специфической дисциплинарной терминологии на язык переменных состояния [20,21]. Так, в частности, обстоит дело с "переводом" на язык моделей анамнестически-синдромального мышления врача при моделировании биомедицинских задач (например, острых отравлений с возможным летальным исходом [22]).

Другой "дополнительный" этап - замыкающий. Основная проблема этого этапа - представление результатов моделирования заказчику. В простейшем случае требуется "обратный перевод" с языка моделирования на дисциплинарные языки, в более сложных случаях речь идет о разработке специального пользовательского интерфейса. Если эти вопросы не были рассмотрены на открывающем этапе, их приходится поднимать заново.

Ясно, что появление дополнительных этапов приводит к изменению и "основных" этапов [1]

, рассмотренных нами в самом начале. Теперь пункт 4, на котором «формулируется цель исследования модели (найти закон преломления света, достичь понимания закономерностей изменения популяции, определить требования к конструкции ракеты, запускающей спутник, и т.д.)» стал лишним. Все проблемы, связанные с постановкой задачи и целями исследования решаются в задачах управления не в процессе моделирования объекта, а до его начала.

Заключение

Рассмотрение вопросов, так или иначе затронутых (и не затронутых) в монографии [1], позволяет выявить сходство и различие в подходах к математическому моделированию в "классическом" его понимании и в трактовках, формирующихся сегодня в теории управления. Как и в рассмотренной монографии, теория управления старается решать проблемы моделирования безотносительно к физической сущности моделируемого объекта. Однако разница исходных позиций - необходимость включения создаваемой модели в контекст задачи управления - делает неизбежной и разную трактовку некоторых принципиальных положений концепции.

Монография [1] полностью достигает поставленных целей - картина математического моделирования (идеи, методы, примеры) представлена в ней широко и на убедительном материале. Однако, к сожалению, специалист по теории управления не найдет в ней многого из того, что ему нужно для повседневной практической работы. Некоторые из этих вопросов и были рассмотрены выше.

Литература

1. А.А.Самарский, А.П.Михайлов. Математическое моделирование. Идеи. Методы. Примеры. - М., Наука, 1997.
2. Алгоритмы и программы восстановления зависимостей (под ред.В.Н.Вапника) М.,: Наука, 1983 - 816 с.
3. Романовский Ю.М., Степанова Н.В., Чернавский Д.С. Математическое моделирование в биофизике - М., Наука, 1975
4. Redshift-3. - Maris Multimedia (CD-ROM) - Applications 1- 4.
5. Frank O.// Zeitschr.Biol. 1895. Bd 32. S 370-437.
6. Лищук В.А. Математические модели сердечно-сосудистой системы. Итоги науки и техники. Бионика, биокибернетика, биоинженерия (т.7) - М., ВИНТИ - 1990 - 140 с.
7. Инженерная физиология и моделирование систем организма (ред.В.Н.Новосельцев). - 1987 - Новосибирск, Наука, 234 с.
8. Деруссо П., Рой Р., Клоуз Ч. Пространство состояний в теории управления. М.: Мир, - 1970, 620с.
9. Дозорцев В.М. Динамическое моделирование в оптимальном управлении и автоматизированном обучении операторов технологических процессов. Ч.1. Задачи оптимального управления // Приборы и системы управления, № 7, 1996, с. 46-51.
10. Дозорцев В.М. Динамическое моделирование в оптимальном управлении и автоматизированном обучении операторов технологических процессов Ч.2. Компьютерные тренажеры реального времени. // Приборы и системы управления, № 8, 1996, с. 41-50.
11. Ю.М.Свирижев, Д.О.Логофет. Устойчивость биологических сообществ М.,:Наука, 1978.
12. Антомонов Ю.Г. Моделирование биологических систем. Справочник. Киев. Наукова думка. 1977 - 260 с.
13. Шумаков В.И., Новосельцев В.Н., Сахаров М.П., Штенгольд Е.Ш. Моделирование физиологических систем организма. - 1971 - Москва, изд-во "Медицина"
14. Полетаев И.А. О математических моделях элементарных процессов в биогеоценозах // Проблемы кибернетики, вып. 16, 1966, с.76-90.
15. Полетаев И.А. О математическом моделировании // Проблемы кибернетики, вып.27, 1973, с.143-151.
16. Перельман И.И. Оперативная идентификация объектов управления. М., Энергоиздат, 1982.
17. Di Stefano III, J.J. The modeling methodology forum: an expanded department. Additional guidelines / American Journal of Physiology, No 1, 1984.
18. Радченко С.В., Еремин С.А., Халитов Ф.Я. Реализация математической модели отравления ФОВ на персональной ЭВМ // II Международная конференция и дискуссионный научный клуб "Новые информационные технологии в медицине и экологии" - Ялта-Гурзуф - 1996 - с.104 - 105.
19. Поспелов Г.С. Искусственный интеллект - основа новой информационной технологии - М., Наука, 1988 - 279 с. ;
20. Vorontsov I.N. On the conceptual basis of a scientific knowlegde system language / Abstr. of 8th Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science. Moscow, USSR, Aug

17-22, 1987, v.4, pt.2, pp.240-242.

21. Новосельцев В.Н. Междисциплинарное моделирование : возможный подход к анализу катастроф / Автоматика и Телемеханика, 1998 - N 2, стр.101-111.

22. Дагаев В.Н., Казачков В.И., Литвинов Н.Н., Новосельцев В.Н. Об использовании математических подходов к совершенствованию диагностики и лечения отравлений / Токсикологический вестник - N 6, 1994, - с.33-36.

Когда статья уже была готова к публикации, её автор, узнав о том, что публикация будет электронной, переслал в адрес редакции [новую версию своей работы](#), со значительными дополнениями - специально для "ЭМЖ". После некоторых колебаний нами было принято решение параллельно опубликовать обе версии статьи без каких-либо изменений.

¹ В это время над проблемами моделирования работала большая группа ученых, в том числе А.А.Ляпунов и И.А.Полетаев, многие вопросы математического моделирования решались на материале экологических систем (В.В.Меншуткин, Ю.М.Свирижев и Д.О.Логофет [\[11\]](#)) и процессов в живых организмах (Н.М.Амосов, В.А.Лищук [\[6\]](#), Ю.Г.Антомонов [\[12\]](#) и др., в том числе и наша группа [\[13\]](#)).